

Н Полные, замкнутые системы в сепарабельном гильбертовом пространстве, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля, теорема Рисса-Фреше

Н-сепараб. пр-во

С-ма $\{x_n\}$ наз-ся **замкн** в H , if $\forall x \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$\alpha_n: \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\| < \varepsilon$$

Это означает, что $L\{x_n\} = H$, где $L\{x_n\} = \{ \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \}$, $\alpha_k \in \mathbb{C}, k=1, 2, \dots$

С-ма $\{x_n\}$ наз-ся **полн** в H , if из $(x_n, x) = 0, \forall n=1, 2, \dots \Rightarrow x=0$

$$L\{x_n\}^\perp = 0 \Rightarrow L\{x_n\}^\perp = 0 \Rightarrow H = L\{x_n\} \oplus L\{x_n\}^\perp \text{ (по } \nabla \text{ Леви)}$$

$$\text{If } \{x_n\} \text{ - замкн} \Rightarrow L\{x_n\} = H \Rightarrow L\{x_n\}^\perp = 0 \Rightarrow \{x_n\} \text{ - полное}$$

$$\text{If } \{x_n\} \text{ - полное} \Rightarrow L\{x_n\}^\perp = 0 \Rightarrow L\{x_n\} = H \Rightarrow \{x_n\} \text{ - замкн}$$

Тогда справедливо **сб** в гильб. пр-ве полнота и замкнутость эквивалентны

В сепараб. пр-ве есть замкн. с-ма $\{e_n\}$

$$\text{Возьмем } x_n = e_n, (e_k, e_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

$$\forall x \in H: \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k = x$$

Ал-ся даным в гильб. пр-ве

сб-ва:

$$1) \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \text{ if } x \perp y$$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2 \text{ (верно для любых эл-тов)}$$

$$2) (x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k) \perp e_k, k=1, n$$

$$\text{Итб } \min_{\alpha_k \in \mathbb{C}} \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\| = \|x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k\|$$

$$\|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|^2 = \|x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k + \sum_{k=1}^n [(x, e_k) - \alpha_k] e_k\|^2 = \text{сб-во 2)} =$$

$$= \|x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k\|^2 + \|\sum_{k=1}^n [(x, e_k) - \alpha_k] e_k\|^2 = \|e_k\|^2 = 1 = \|x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k\|^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^n |(x, e_k) - \alpha_k|^2 \Rightarrow \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|^2 \geq \|x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k\|^2, \text{ причем рав-во}$$

достигается $\Leftrightarrow \alpha_k = (x, e_k)$

Лемма (Лер-во Бесселя) $\forall x \in H \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \|x\|^2$

Из пред. леммы $\Rightarrow \|x - \sum_{k=1}^n x_k e_k\|^2 = \|x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k\|^2 + \sum_{k=1}^n |(x, e_k) - x_k|^2$
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2$
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2$

Следствие $\forall x \in H \Rightarrow (x, e_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ (необх. признак ск-ти числ. ряда)

Лемма (Рав-во Парсеваля) Если ортонорм. с-ма $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - полная в $H \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2$ и $\|\sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (т.е. ряд Фурье ск-ся к x по норме H)

Если $\{e_k\}$ - замкн $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon), \exists \alpha_1, \dots, \alpha_{n_0}: \|x - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k e_k\| \leq \varepsilon$
 $\|x - \sum_{k=1}^{n_0} (x, e_k) e_k\| \leq \|x - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k e_k\| \leq \varepsilon$
 $\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n_0} |(x, e_k)|^2 \geq 0$ - не возрастает при увеличении n_0 , отсюда

Лемма верно $\forall n \geq n_0$. Устремим $n \rightarrow \infty: \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leq \varepsilon^2$. В силу произвол-ти $\varepsilon \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$

Лемма (Рисса-Фишера) Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - полная ортонорм. с-ма в H , $c_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$. Тогда $\exists ! x \in H: c_k = (x, e_k), k = \overline{1, \infty}$

$S_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k$. Д-м, что $\{S_n\}$ - ф-ма. $\exists m > n \Rightarrow \|S_m - S_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^m c_k e_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |c_k|^2 \leq \varepsilon, \forall m, n \geq N(\varepsilon)$ (в силу ск-ти ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$)
 $\Rightarrow \{S_n\}$ - ф-ма в $H \Rightarrow \{e_k\}$ - полн. $\Rightarrow \exists ! x \in H: \|S_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$(x, e_k) = (\lim_{n \rightarrow \infty} S_n, e_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n, e_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_k = c_k$
 $\Rightarrow (x, e_k) = c_k = (\tilde{x}, e_k) \Rightarrow c_k - c_k = 0 = (x, e_k) - (\tilde{x}, e_k) \Rightarrow 0 = (x - \tilde{x}, e_k), \forall k = 1, 2, \dots \Rightarrow x - \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow x = \tilde{x}$
 $\{e_k\}$ - полная (и орто-на только 0)